

Тема: Системи випадкових величин

1. Поняття про системи випадкових величини. Закон розподілу системи.
2. Умовні закони розподілу складових системи двох випадкових величин.
3. Числові характеристики системи двох випадкових величин.
4. Коефіцієнт кореляції. Поняття про функцію регресії.

Тема: Елементи теорії випадкових процесів

5. Поняття по випадковий процес.
6. Числові характеристики випадкових процесів.
7. Кореляційна функція процесу. Властивості кореляційної функції.
8. Дискретні ланцюги Маркова.

ВСТУП

Ми вже вивчили випадкові величини та їх основні характеристики. Знаємо, що випадкові величини широко застосовуються в економічних дослідженнях. В матеріалі сьогоднішньої лекції ознайомимось з системами випадкових величин, які є узагальненням поняття «Випадкова величина». Особливу увагу раджу звернути на питання 4 (**Коефіцієнт кореляції. Поняття про функцію регресії**).

Коефіцієнт кореляції – це нова числова характеристика, притаманна лише системам випадкових величин – характеризує ступінь статистичного зв'язку між економічними показниками. А математичними моделями такого зв'язку є функції регресії. Тобто, ці два поняття є основою кореляційно-регресійного аналізу – одного з найпотужніших методів в економічних дослідженнях.

Стосовно важливості теми «Елементи теорії випадкових процесів» можна сказати наступне: без цього поняття не можливо виявити сутність фундаментальних економічних процесів, оскільки більшість із них є випадковими.

1. Поняття системи випадкових величини. Закон розподілу системи

Якщо результат досліду описується не однією, а декількома випадковими величинами, вони утворюють систему випадкових величин.

***Означення.** Системою n випадкових величин (n -вимірною випадковою величиною, або випадковим вектором) називають впорядкований набір n випадкових величин (X_1, X_2, \dots, X_n) .*

На системи випадкових величин розповсюджуються основні означення, які стосуються одновимірних випадкових величин. Але при викладенні матеріалу лекції основну увагу зосередимо на системі двох випадкових

величин, яку позначимо через (X, Y) . Кожну з величин X і Y назвемо компонентами або складовими системи.

Означення. Якщо компонентами системи (X, Y) є дискретні випадкові величинами, то систему називають дискретною, якщо – неперервні, то систему називають неперервною.

Як і в одновимірному випадку, система n випадкових величин (X_1, X_2, \dots, X_n) повністю задається законом розподілу ймовірностей.

Означення. Законом розподілу системи n випадкових величин називають перелік можливих значень системи та відповідних їм ймовірностей

Закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин має найпростішу форму і задається у табличній формі:

$X = x_j$ $Y = y_i$	x_1	x_2	x_3	...	x_m	P_{yi}
y_1	P_{11}	P_{12}	P_{13}		P_{1m}	P_{y1}
y_2	P_{21}	P_{22}	P_{23}		P_{2m}	P_{y2}
y_3	P_{31}	P_{32}	P_{33}		P_{3m}	P_{y3}
...
y_k	P_{k1}	P_{k2}	P_{k3}	...	P_{km}	P_{yk}
P_{ij}	P_{x1}	P_{x2}	P_{x3}	...	P_{xm}	

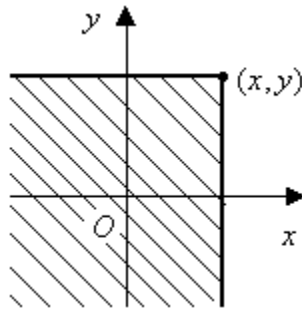
Означення. Функцією розподілу ймовірностей двовимірної випадкової величини (X, Y) (дискретної або неперервної) називають функцію $F(x, y)$, яка для кожної пари чисел (x, y) визначає:

$$F(x, y) = P((X < x)(Y < y))$$

Властивості функції розподілу $F(x, y)$ аналогічні властивостям одновимірної випадкової величини:

- $0 \leq F(x, y) \leq 1$.
- $F(x, y)$ - неспадна функція за кожним з аргументів.
- $F(-\infty, y) = 0$, $F(x, -\infty) = 0$, $F(-\infty, -\infty) = 0$, $F(\infty, \infty) = 1$.

Геометричне тлумачення $F(x, y)$



Означення. Щільністю розподілу ймовірностей двовимірної неперервної випадкової величини називають другу мішану похідну від функції розподілу $F(x, y)$:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}.$$

Геометрично цю функцію можна тлумачити як поверхню, яку називають поверхнею розподілу.

Властивості щільності розподілу ймовірностей

$$f(x, y) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1.$$

$$F(x, y) = \iint_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv.$$

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy, \quad f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$$

2. Умовні закони розподілу складових системи двох випадкових величин

Дискретна система випадкових величин

Означення. Умовним розподілом компоненти X при $Y = y_j$ називають сукупність умовних ймовірностей $p(x_i / y_j)$ в припущенні, що $Y = y_j$. Аналогічно визначається умовний розподіл компоненти Y при $X = x_i$.

За законом розподілу дискретної системи (X, Y) можна скласти умовні закони розподілу компонент X та Y :

$$p(x_i / y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)},$$

$$p(y_j / x_i) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)}.$$

Неперервна система випадкових величин

Означення. Умовною щільністю $f_1(x/y)$ розподілу компоненти X при значенні $Y = y$ називають відношення щільності сумісного розподілу $f_1(x, y)$

системи (X, Y) до щільності $f_2(y)$ компоненти Y . Аналогічно визначається умовна щільність $f_2(y/x)$ компоненти Y при значенні $X=x$:

$$f_1(x/y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)},$$

$$f_2(y/x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)}.$$

3. Числові характеристики системи двох випадкових величин

Для системи двох випадкових величин найважливішими числовими характеристиками є математичне сподівання, дисперсія і середнє квадратичне відхилення кожної із складових.

Для дискретних систем:

- математичні сподівання складових:

$$M(X) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m x_j p_{ij} = \sum_{j=1}^m x_j p_{x_j}, \quad M(Y) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m y_i p_{ij} = \sum_{i=1}^k y_i p_{y_i}.$$

- дисперсії та середнє квадратичні відхилення складових:

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m x_j^2 p_{ij} - M^2(X) = \sum_{j=1}^m x_j^2 p_{x_j} - M^2(X).$$

$$\sigma(X) = \sigma_x = \sqrt{D(X)}.$$

$$D(Y) = M(Y^2) - M^2(Y) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m y_i^2 p_{ij} - M^2(Y) = \sum_{i=1}^k y_i^2 p_{y_i} - M^2(Y).$$

$$\sigma(Y) = \sigma_y = \sqrt{D(Y)}.$$

Для неперервних систем:

- математичні сподівання складових:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x, y) dx dy, \quad M(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f(x, y) dx dy$$

- дисперсії та середнє квадратичні відхилення складових:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x, y) dx dy$$

$$\sigma(X) = \sigma_x = \sqrt{D(X)}.$$

$$D(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (y - m_y)^2 f(x, y) dx dy$$

$$\sigma(Y) = \sigma_y = \sqrt{D(Y)}.$$

Сукупність математичних сподівань є характеристикою положення системи. Геометрично – це координати точки на площині, навколо якої відбувається розсіювання значень системи. Сукупність дисперсій (середньо квадратичних відхилень) є характеристикою міри розсіювання значень системи відносно її математичного сподівання.

4. Коефіцієнт кореляції. Поняття про функцію регресії.

Під час вивчення системи двох і більше випадкових величин доводиться з'ясувати наявність зв'язку між цими величинами та його характер. Розглянемо характеристики системи, які визначають міру (тісноту) лінійної залежності її складових. До таких характеристик відносяться кореляційний момент і коефіцієнт кореляції.

Означення. Кореляційним моментом μ_{xy} випадкових величин X і Y називають математичне сподівання добутку відхилень цих величин від своїх математичних сподівань:

$$\mu_{xy} = M((X - m_x)(Y - m_y)).$$

Кореляційний момент двох дискретних випадкових величин обчислюється за формулою:

$$\mu_{xy} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_i - m_x)(y_j - m_y)p(x_i, y_j),$$

двох неперервних випадкових величин – за формулою:

$$\mu_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)(y - m_y)f(x, y)dx dy.$$

Кореляційний момент має такі властивості:

- 1) $\mu_{xy} = \mu_{yx}$ – властивість симетричності;
- 2) $\mu_{xy} = 0$, якщо X і Y – незалежні величини;
- 3) $|\mu_{xy}| \leq \sigma_x \sigma_y$.

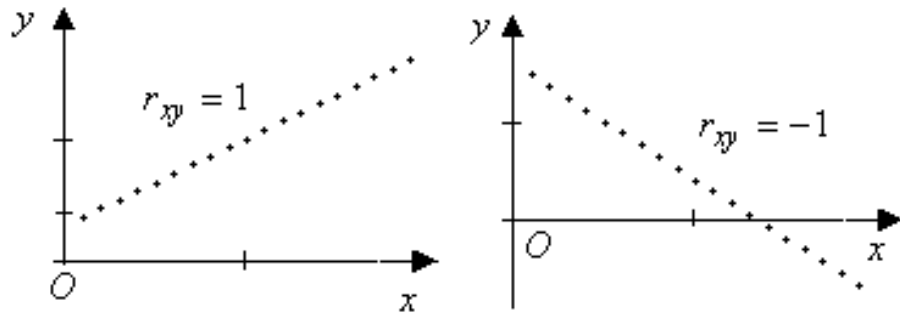
Кореляційний момент має розмірність, яка дорівнює добутку розмірностей випадкових величин X і Y . Тому введемо ще одну числову характеристику, яка не має розмірності – коефіцієнт кореляції:

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}.$$

Якщо коефіцієнт кореляції не дорівнює нулю, то випадкові величини називають корельованими. В протидежному випадку – некорельованими.

Для незалежних випадкових величин і коефіцієнт кореляції дорівнює нулю. Проте, ця умова необхідна, але недостатня для незалежності випадкових величин. Існують залежні випадкові величини, для яких коефіцієнт кореляції дорівнює нулю.

Значення коефіцієнта кореляції лежить у межах: $-1 \leq r_{xy} \leq 1$ і характеризує ступінь тісноти лінійної залежності між величинами:



Поняття функції регресії

Означення. Умовним математичним сподіванням дискретної випадкової величини Y при $X=x_i$ називають добуток можливих значень компоненти Y на їх умовні ймовірності:

$$M(Y/X = x_i) = \sum_{j=1}^m y_j p(y_j/x_i).$$

Означення. Умовне математичне сподівання $M(Y/x_i)$ є функція від x :

$$M(Y/x_i) = f(x),$$

яку називають функцією регресії Y на X .

Аналогічні формули для умовного математичного сподівання компоненти X при $Y=y_j$.

Для неперервних величин умовні математичні сподівання (функції регресії) мають вид:

$$M(Y/X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_2(y/x) dy, \quad M(X/Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x/y) dx.$$

Тема: Елементи теорії випадкових процесів

5. Поняття випадкового процесу

Означення. Випадковою функцією називається функція $X(t)$, значення якої для будь-якого значення t є випадковою величиною, тобто це та функція, яка за результатом досліду може прийняти вигляд, заздалегідь невідомий.

Певний вигляд, який приймає випадкова функція за результатом досліду, називається реалізацією випадкової функції.

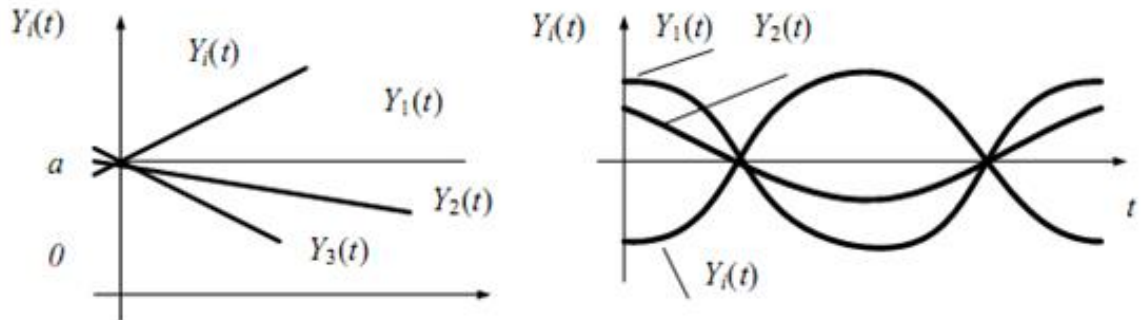
Якщо зафіксувати час t , то функція $X(t)$ перетворюється у випадкову величину, яка називається перетином випадкової функції в момент часу t .

Означення. Якщо у випадковій функції $X(t)$, аргументом t є час, то випадкову функцію називають випадковим процесом.

Множина реалізацій випадкового процесу та множина перетинів випадкової функції - основний експериментальний матеріал, на основі якого можна отримати характеристики випадкового процесу.

Відомо, що універсальною вичерпною характеристикою будь-якої випадкової величини є її функція розподілу $F(x) = P\{X < x\}$, тобто ймовірність того, що випадкова величина X приймає значення, менше заданого x . Нехай маємо випадковий процес $X(t)$. Будь-який перетин випадкового процесу $X(t)$ являє собою випадкову величину, яка має закон розподілу

$$F(t, x) = P\{X(t) < x\}$$



Ця функція залежить від двох аргументів: по-перше, від значення t , для якого береться розтин; по-друге, від значення x , менше якого повинна бути випадкова величина $X(t)$. Вона називається одновимірним законом розподілу випадкового процесу $X(t)$. Очевидно, одновимірний закон розподілу не може служити повною вичерпною характеристикою випадкового процесу $X(t)$. Більш повною характеристикою буде двовірний закон розподілу, представлений спільною функцією розподілу двох перерізів випадкового процесу, взятих відповідно для моментів t_1 і t_2 :

$$F(t_1, t_2, x_1, x_2) = P\{X(t_1) < x_1, X(t_2) < x_2\}.$$

Ця функція вже не двох, а чотирьох аргументів.

Те ж саме стосується і щільності ймовірностей. Якщо припустити, що перетин є неперервною випадковою величиною, то його закон розподілу визначається щільністю ймовірностей $f(x, t)$. Функція $f(x, t)$ не є вичерпною характеристикою $X(t)$, тому що вона не містить залежності між перетинами $X(t)$ в різні моменти часу. Повнішу характеристику дає функція $f(x_1, x_2, t_1, t_2)$ – сумісна щільність розподілу системи двох випадкових величин $X(t_1)$, $X(t_2)$, де t_1, t_2 – довільні значення аргумента t . Очевидно, теоретично можна необмежено збільшувати число значень і отримати при цьому все більш повну характеристику випадкового процесу. Однак оперувати з настільки громіздкими характеристиками, що залежать від багатьох аргументів, вкрай незручно. В інженерних додатках зазвичай обмежуються одновірним, іноді - двовірним законом розподілу випадкового процесу.

6.Числові характеристики випадкових процесів

Основними характеристиками будь-якого випадкового процесу є математичне сподівання $M(X(t))=m_X(t)$, дисперсія $D(X(t))$ та середнє квадратичне відхилення $\sigma_X(t) = \sqrt{D(X(t))}$, які є функціями від t . Математичне сподівання – це середня траєкторія для всіх реалізацій процесу.

Дисперсія характеризує можливий розклад реалізацій випадкової функції навколо середньої траєкторії.

Означення. Математичним сподіванням випадкового процесу $X(t)$ називається невідпадаюча функція $m_x(t)$, яка при будь-якому значенні аргументу t дорівнює математичному очікуванню відповідного перетину випадкового процесу.

$$m_x(t) = M[x(t)],$$

де $m_x(t)$ - середня функція;

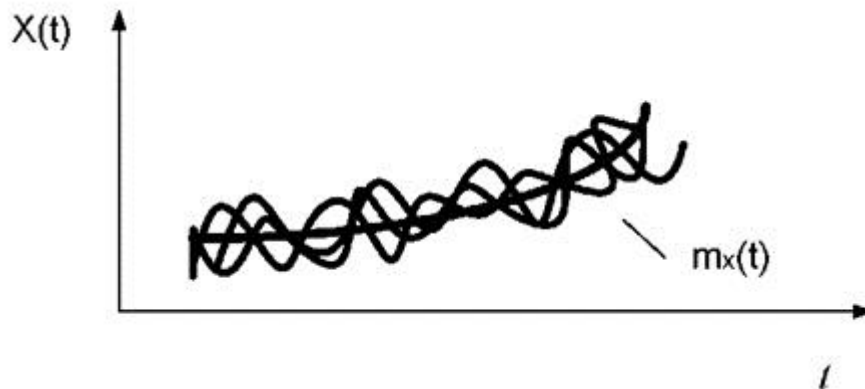


Рис. Математичне сподівання випадкового процесу $X(t)$

Якщо перетин випадкового процесу $X(t)$ при даному $t \in$ дискретною випадковою величиною з розподілом імовірностей (табл.),

$x_1(t)$	$x_2(t)$	$x_3(t)$...	$x_i(t)$...
$p_1(t)$	$p_2(t)$	$p_3(t)$...	$p_i(t)$...

то його математичне сподівання обчислюється за формулою

$$m_x(t) = M[x(t)] = \sum_i x_i(t)p_i(t),$$

Якщо перетин випадкового процесу $X(t)$ при даному t являє собою неперервну випадкову величину з щільністю $f(t,x)$, то його математичне сподівання може бути обчислено за формулою

$$m_x(t) = M[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(t, x)dx.$$

Центровані випадковим процесом $X(t)$ називається процес:

$$\overset{0}{X}(t) = X(t) - m_x(t).$$

Початковим моментом k -го порядку випадкового процесу $X(t)$ називається величина:

$$\alpha_k(k) = M[(X(t))^k]$$

Центральний момент k -го порядку випадкового процесу називається величина:

$$\mu_k(t) = M[(X(t) - m_x(t))^k].$$

Дисперсія випадкового процесу:

$$D_x(t) = D[X(t)] = M[X^2(t)] - m_x^2(t).$$

Якщо перетин $X(t)$ є дискретною випадковою величиною, то дисперсія випадкового процесу знаходиться за формулою:

$$D_x(t) = D[X(t)] = \sum (x_i - m_x(t))^2 p_i(t),$$

Якщо перетин $X(t)$ є неперервною випадковою величиною з щільністю $f(t,x)$, то дисперсія випадкового процесу знаходиться за формулою

$$D_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - m_x(t)]^2 f(t, x) dx.$$

Середнім квадратичним відхиленням $\sigma_x(t)$ випадкового процесу $X(t)$ називається арифметичне значення кореня квадратного з дисперсії $D_x(t)$:

$$\sigma_x(t) = \sigma[X(t)] = \sqrt{D_x(t)}.$$

7. Кореляційна функція процесу. Властивості кореляційної функції

Ступінь залежності (зв'язку) між двома випадковими величинами X і Y визначається їх коваріацією (кореляційним моментом):

$$K_{xy} = M[XY] - m_x m_y.$$

Аналогічна характеристика вводиться і для випадкового процесу

Розглянемо дві випадкових величини – два перетина випадкового процесу для моментів t і t' : $X(t)$ і $X(t')$. Для цих двох випадкових величин можна знайти коваріацію (кореляційний момен):

$$K_x(t, t') = M[X(t)X(t')] - m_x(t)m_x(t').$$

Функція $K_x(t, t')$ називається кореляційною функцією випадкового процесу.

Означення. Кореляційною функцією випадкового процесу $X(t)$ називається не випадкова функція $K_x(t, t')$ двох аргументів t і t' , яка для будь якої пари значень аргументів t і t' дорівнює коваріації відповідних перерізів $X(t)$ і $X(t')$ випадкового процесу.

Властивості кореляційної функції:

1. Властивість симетрії: $K_x(t_1, t_2) = K_x(t_2, t_1)$.

2. Якщо до випадкової функції $X(t)$ додати не випадкову функцію $\varphi(t)$, то кореляційна функція не зміниться, тобто:

$$K_{X(t)+\varphi(t)}(t_1, t_2) = K_{X(t)}(t_1, t_2).$$

3. При множенні випадкової функції $X(t)$ на не випадкову $\varphi(t)$ кореляційний момент помножується на добуток функцій $\varphi(t_1)$ і $\varphi(t_2)$:

$$K_{X(t)+\varphi(t)}(t_1, t_2) = \varphi(t_1)\varphi(t_2)K_{X(t)}(t_1, t_2).$$

Нормованою кореляційною функцією $r_x(t, t')$ випадкового процесу $X(t)$

$$r_x(t, t') = \frac{K_x(t, t')}{\sigma_x(t)\sigma_x(t')}.$$

називається функція,

Нормована кореляційна функція за модулем не перевищує одиницю:

$$|r_x(t, t')| \leq 1.$$

Взаємно кореляційна функція

Нехай маємо два випадкових процеси $X(t)$, $Y(t)$, кожний з яких впливає на інший. Такий вплив можна оцінити за допомогою взаємно кореляційної функції:

$$R_{XY} \left(\overset{\circ}{X}(t), \overset{\circ}{Y}(t) \right), \text{ де } \overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_X(t), \overset{\circ}{Y}(t) = Y(t) - m_Y(t).$$

8. Дискретні ланцюги Маркова

Випадкові процеси класифікуються «за часом» і «за станам» системи, в якій він протікає.

Випадковий процес $X(t)$ називається процесом з дискретним часом, якщо система, в якій він протікає, може міняти свій стан тільки в конкретні моменти t_1, t_2, \dots, t_n число яких скінченне.

Випадковий процес $X(t)$ називається процесом з неперервним часом, якщо переходи системи з одного стану в інший можуть відбуватися в будь-який момент часу t .

Випадковий процес $X(t)$ називається процесом з дискретним станом, якщо множина його станів є дискретною множиною.

Випадковий процес $X(t)$ називається процесом з неперервним станом, якщо якщо множина його станів є неперервною множиною.

Стаціонарний процес

Процес $X(t)$ називається стаціонарним, якщо щільність його розподілу задовольняє умові:

$f(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_n + \tau) = f(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n)$ для будь-яких $t_1, t_2, \dots, t_n, \tau$ та n .

Це визначення стаціонарності у вузькому розумінні. Якщо $n=2$, тобто $f(x_1, x_2, t_1 + \tau, t_2 + \tau) = f(x_1, x_2, t_1, t_2)$, то випадковий процес називається стаціонарним у широкому розумінні.

Означення. Нехай маємо деяку систему S , яка може знаходитися в одному із станів s_1, s_2, \dots, s_n і може змінити свій стан тільки в моменти часу $t_1, t_2, \dots, t_m, \dots$ ($t_1 < t_2 < \dots < t_m < \dots$), причому ймовірність того, що в момент часу t_m система перебуває в стані s_j , залежить тільки від того, в якому стані система знаходилась у момент часу t_{m-1} . У цьому випадку кажуть, що задано ланцюг Маркова.

Якщо в момент часу t_{m-1} система знаходилась у стані s_i , то ймовірність того, що в наступний момент часу t_m система буде перебувати в стані s_j , називається перехідною і позначається

$$p_{ij}^{(m)} = p_{t_m} (s_i \rightarrow s_j).$$

Якщо ця ймовірність не залежить від часу t_m , то ланцюг Маркова зветься однорідним, а ймовірність позначається p_{ij} . Оскільки система може

перебувати в одному з n станів s_1, s_2, \dots, s_n , то можна побудувати матрицю переходу

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nn} \end{pmatrix}.$$

Стани системи утворюють повну групу подій.

Якщо перехід від стану s_i до стану s_j можна зробити за m етапів, то вибирають стан s , з якого роблять перехід до кінцевого стану. Тоді будують матрицю переходу $P(m)$:

$$P(m) = P(s)P(m-s).$$

Це рівняння називається рівнянням Колмогорова-Чепмена.