СИМПЛЕКС–МЕТОД
(Основний аналітичний метод розв'язання лінійних оптимізаційних задач)

ПЛАН

1. Поняття про симплекс-метод
2. Алгебра симплекс-методу
3. Ітераційні таблиці симплекс-методу
4. Алгоритм табличного симплекс-методу

ЗАУВАЖЕННЯ. Матеріал лекції базується на таких положеннях:

- основна теорема теорії лінійної оптимізації (ця теорема і наштовхнула авторів на створення симплекс-методу);
- розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом Жордана-Гауса (метод Жордана-Гауса покладено в ітераційну основу симплекс-методу).

Згадаємо суть основної теореми теорії лінійної оптимізації:

Якщо задача лінійного програмування (ЗЛП) має розв'язок, то він знаходиться тільки в кутовій точці області допустимих планів задачі.

Метод Жордана-Гауса – І семестр.

1. Поняття про симплекс-метод

Якщо згадати основну теорему лінійного програмування, то можна дати таку рекомендацію: для знаходження розв'язку задачі лінійного програмування (ЗЛП) треба знайти всі кутові точки області допустимих планів (многогранника планів), обчислити значення цільової функції в цих точках та обрати оптимальне. Тобто розв'язати ЗЛП можна простим перебором опорних планів, максимальна кількість яких задається комбінаторним числом C_n^m (n – число невідомих, m – число базисних невідомих). Але на практиці такий спосіб неприйнятний, оскільки вже при n=10 та m=3 маємо $C_{10}^3 \dfrac{10!}{3!(10-3)!} = 120$ варіантів.

У зв'язку з цими труднощами виникла потреба впорядкованого перебору кутових точок області допустимих планів (ОДП) (або опорних планів) ЗЛП, який забезпечив би цілеспрямоване "покращення" значення цільової функції при переході до наступного опорного плану.

Такий метод для чисельного розв'язування канонічної ЗЛП був розроблений наприкінці 40-х років XX ст. американським вченим Дж. Б. Данцігом і одержав назву "симплекс-метод" від простого прикладу, при розв'язуванні якого він використовувався. В цей приклад входило обмеження виду $\sum_{j=1}^{n} x_j = 1,\ x_j \ge 0$, яке задає опуклий многогранник в nвимірному просторі . А такий многогранник називається симплексом. Пізніше назва “симплекс” почала вживатися незалежно від форми лінійних обмежень, а сам метод у літературі іноді називають методом послідовного покращення плану.

Ідею такого переходу від одного опорного плану до іншого, за якого відбувається “покращення” значень цільової функції, прослідкуємо на прикладі задачі, яка розв’язана графічно в попередній лекції.

2. Алгебра симплекс-методу

Задача. Розглянемо задачу, що розв’язана графічно в попередній лекції. Зведемо її до канонічної форми:

$$F_1(x_1, x_2) = 50x_1 - 40x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 20 \\ 8x_1 + 5x_2 + x_4 = 40 \\ x_1 - x_2 + x_5 = 1 \\ x_j \ge 0 \left(j = \overline{1,5}\right) \end{cases}$$

Розв’язування. **Перший крок.** Введення балансових змінних x_3, x_4 та x_5 вирішило проблему виділення базису – ці змінні є базисними. Виразимо їх через вільні змінні x_1 та x_2. Цільова функція через вільні змінні вже виражена. Задачу перепишемо в такому вигляді:

$$F_1(x_1, x_2) = -50x_1 - 40x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} x_3 = 20 - 2x_1 - 5x_2 \\ x_4 = 40 - 8x_1 - 5x_2 \\ x_5 = 1 - x_1 + x_2 \\ x_j \ge 0 \left(j = \overline{1,5}\right) \end{cases} \tag{2.1}$$

Прирівнявши нулю вільні змінні, одержимо перший опорний план задачі , $\overline{X_1} = (0; 0; 20; 40; 1)$, $F_1\left(\overline{X_1}\right) = 0$.

Після знаходження першого опорного плану постає питання: чи є цей опорний план оптимальним, а значення цільової функції на ньому мінімальним? Ні не є, адже значення цільової функції можна зменшити за рахунок збільшення значень вільних змінних x_1 та x_2, оскільки ці змінні мають від’ємні коефіцієнти. Для спрощення подальших обчислень домовимося збільшувати значення змінної x_2, а значення x_1 залишимо нульовим ($x_1 = 0$). Приймаємо $x_2 = 4$. Це найбільше значення змінної x_2, за якого всі інші змінні залишаються невід'ємними, визначається найменшим значенням відношення вільного члена до коефіцієнта при змінній x_2 в системі (2.1).

Тепер, коли x_1=0, а x_2=4, одержимо новий опорний план $\overline{X_2} = (0; 4; 0; 20; 5)$, $F_1(\overline{X_2}) = -50 \cdot 0 - 40 \cdot 4 = -160$. Значення цільової функції зменшилось з 0 до –160. Це свідчить про те, що перший крок зроблено у вірному напрямку.

Другий крок почнемо з проведення обміну змінних $(x_2 \leftrightarrow x_3)$. Змінну x_2 введемо в базис, а змінну x_3 виведемо з базиса, вона стає вільною. Через вільні змінні x_1 та x_3 виразимо базисні змінні x_2 , x_4, x_5 та цільову функцію. Відразу звернемо увагу на перше рівняння системи обмежень (2.1). З нього нову базисну змінну x_2 виразимо через нові вільні змінні x_1 та x_3, а потім це значення підставимо в усі інші рівняння та цільову функцію:

$$\begin{cases} x_2 = 4 - \frac{2}{5}x_1 - \frac{1}{5}x_3 \\ x_4 = 40 - 8x_1 - 5\left(4 - \frac{2}{5}x_1 - \frac{1}{5}x_3\right) = 20 - 6x_1 + x_3 \\ x_5 = 1 - x_1 + 4 - \frac{2}{5}x_1 - \frac{1}{5}x_3 = 5 - \frac{7}{5}x_1 - \frac{1}{5}x_3 \\ x_j \geq 0 \left(j = \overline{1,5}\right). \end{cases}$$

$$F_1(x_1, x_3) = -50x_1 - 40\left(4 - \frac{2}{5}x_1 - \frac{1}{5}x_3\right) = -160 - 34x_1 + 8x_3 \to \min .$$

Перепишемо компактніше:

$$F_1(x_1, x_3) = -160 - 34x_1 + 8x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} x_2 = 4 - \frac{2}{5}x_1 - \frac{1}{5}x_3 \\ x_4 = 20 - 6x_1 + x_3 \\ x_5 = 5 - \frac{7}{5}x_1 - \frac{1}{5}x_3 \\ x_j \geq 0 \left(j = \overline{1,5}\right). \end{cases} \qquad (2.2)$$

В цільовій функції залишився один від'ємний коефіцієнт –34 при змінній x_1. Тому її значення можна зменшити тільки за рахунок збільшення значення змінної x_1, а це означає, що на третьому кроці її буде введено в базис. Найменше значення відношення вільного члена до коефіцієнта при змінній x_1 в рівняннях системи (2.2) дорівнює $\frac{10}{3}$, тому приймаємо $x_1 = \frac{10}{3}$.

При $x_1 = \frac{10}{3}$ та $x_3 = 0$ одержимо новий опорний план $\overline{X_3} = \left(\frac{10}{3}; \frac{8}{3}; 0; 0; \frac{1}{3}\right)$ на якому $F_1\left(\overline{X_3}\right) = -\frac{820}{3}$. І знову спостерігається зменшення значення цільової функції з –160 до $-\frac{820}{3}$ – це свідчить про ефективність другого кроку.

Третій крок починаємо з обміну змінних $(x_1 \leftrightarrow x_4)$. Базисні змінні x_1, x_2, x_5 та цільову функцію виразимо через вільні змінні x_3 та x_4, одержимо

$$F_1(x_3, x_4) = -\frac{820}{3} + \frac{7}{3}x_3 + \frac{17}{3}x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} x_2 = \frac{8}{3} - \frac{8}{30}x_3 + \frac{2}{30}x_4 \\ x_1 = \frac{10}{3} + \frac{1}{6}x_3 - \frac{1}{6}x_4 \\ x_3 = \frac{1}{3} - \frac{13}{30}x_3 + \frac{7}{30}x_4 \\ x_j \geq 0 \left(j = \overline{1,5}\right). \end{cases}$$

Обидва коефіцієнти при вільних змінних, які входять у цільову функцію, додатні, тому зменшити значення цільової функції більше неможливо. Третій опорний план виявився оптимальним.

Відповідь до канонічної задачі: $X_{опт} = \left(\frac{10}{3}; \frac{8}{3}; 0; 0; \frac{1}{3}\right)$; $F_{1\min} = -\frac{820}{3}$.

Відповідь до стандартної задачі (1.2): $X_{опт} = \left(\frac{10}{3}; \frac{8}{3}\right)$; $F_{1\max} = \frac{820}{3}$.

ПОЯСНЕННЯ АЛГОРИТМУ.

Відповідь до стандартної задачі співпала з відповіддю, яку ми одержали при графічному розв'язуванні. Якщо проаналізувати рис 1.1, то можна сказати, що кроки симплекс-методу здійснено від точки О (0; 0) до точки А (0; 4) і до точки В $\left(\frac{10}{3}; \frac{8}{3}\right)$ так, щоб значення цільової функції зменшилося. Перелічені точки відповідають опорним розв'язкам задачі:

$$\overline{X_1} = (0; 0; 20; 40; 1) \Leftrightarrow O(0; 0)$$
$$\overline{X_2} = (0; 4; 0; 20; 5) \Leftrightarrow A(0; 4)$$
$$\overline{X_3} = \left(\frac{10}{3}; \frac{8}{3} 0; 0; \frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow B\left(\frac{10}{3}; \frac{8}{3}\right).$$

3. Ітераційні таблиці симплекс-методу

З точки зору забезпечення раціональності та наочності обчислювального процесу виконання алгоритму симплекс-методу зручно оформляти у вигляді послідовності таблиць. В різноманітних джерелах наводяться різні модифікації симплекс-таблиць, які відрізняються одна від однієї розміщенням та символічними позначеннями окремих елементів, але всі вони базуються на одних і тих же принципах.

Розв’язування задачі з попереднього пункту наведемо у вигляді симплекс-таблиць:

F	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_0	$\sum$	Примітки
0	2	$\boxed{5}$	1	0	0	20	28	$20:5=4-\min$
0	8	5	0	1	0	40	54	$40:5=8$
0	1	–1	0	0	1	1	2	
1	50	40	0	0	0	0	91	
0	$\frac{2}{5}$	1	$\frac{1}{5}$	0	0	4	$\frac{28}{5}$	$4:\frac{2}{5}=10$
0	$\boxed{6}$	0	–1	1	0	20	26	$20:6=\frac{10}{3}-\min$
0	$\frac{7}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	0	1	5	$\frac{38}{5}$	$5:\frac{7}{5}=\frac{25}{7}$
1	34	0	–8	0	0	–160	–133	
0	0	1	$\frac{8}{30}$	$-\frac{2}{30}$	0	$\frac{8}{3}$	$\frac{58}{15}$	
0	1	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{20}{6}$	$\frac{26}{6}$	
0	0	0	$\frac{13}{30}$	$-\frac{7}{30}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{46}{30}$	
1	0	0	$-\frac{7}{3}$	$-\frac{17}{3}$	0	$-\frac{820}{3}$	$-\frac{726}{3}$	

З останньої таблиці запишемо відповідь до канонічної задачі.

Відповідь: $X_{опт}=\left(\frac{10}{3};\frac{8}{3};0;0;\frac{1}{3}\right)$, $F_{1\min}=-\frac{820}{3}$.

ПОЯСНЕННЯ.

Розв’язування задачі складалося з трьох кроків. Кожному крокові відповідає таблиця. Перетворення таблиць відбувається за методом Гауса-Жордана, тільки розв’язувальний елемент визначається специфікою умови задачі лінійного програмування. В попередній задачі без зайвого клопоту визначено базисні змінні та початковий опорний план. Для цього випадку запишемо алгоритм знаходження оптимального плану ЗЛП.

4. Алгоритм табличного симплекс-методу

1. Задачу звести до канонічного виду, виділити базисні змінні, цільову функцію виразити через вільні змінні.

2. До системи обмежень приєднати рівняння цільової функції, після чого одержимо систему:

$$\begin{cases} x_1 + \sum\limits_{j=m+1}^{n} a_{ij} x_j = b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_i + \sum\limits_{j=m+1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_m + \sum\limits_{j=m+1}^{n} a_{ij} x_j = b_m \\ F_1 - \sum\limits_{j=m+1}^{n} c_j x_j = 0 \\ x_i \geq 0 \left(i = \overline{1,m}\right);\ x_j \geq 0 \left(i = \overline{m+1,n}\right), \end{cases}$$

де $x_i \geq 0 \left(i = \overline{1,m}\right)$ – базисні змінні, $x_j \geq 0 \left(i = \overline{m+1,n}\right)$ – вільні змінні.

3. Записати вихідну симплекс-таблицю, яка відповідає системі *п*.2. Вона буде мати такий вигляд:

F_1	x_1	...	x_i	...	x_m	x_{m+1}	...	x_n	B	$\sum$	**Примітки**
0	1	…	0	…	0	$a_{1(m+1)}$	…	a_{1n}	b_1	$\sum_1$	
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	
0	0	…	1	…	0	$a_{i(m+1)}$	…	a_{in}	b_i	$\sum_i$	
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	
0	0	…	0	…	1	$a_{m(m+1)}$		a_{mn}	b_m	$\sum_m$	
1	0	…	0	…	0	C_{m+1}	…	C_n	0	$\sum_{F_1}$	

Таблицю записано так, що базисні змінні йдуть першими, а потім – вільні, але це несуттєво – змінні можуть чергуватися в будь-якому порядку. В останньому рядку (назвемо його оцінним) коефіцієнти (назвемо їх оцінками) в базисних стовпцях (x_1, …, x_i, …, x_m) завжди повинні дорівнювати нулю, оскільки цільова функція F_1 виражена через вільні змінні. Стовпець “Примітки” потрібен для визначення розв’язувальних елементів.

4. Розглянути елементи оцінного рядка. Якщо серед них усі від’ємні – задачу розв’язано. Якщо є додатні, то обираємо один із них (краще більший); стовпець, в якому знаходиться обраний елемент, назвемо розв’язувальним. В стовпцеві “Примітки” запишемо відношення вільних членів (B) до додатніх елементів розв’язувального стовпця і оберемо найменше з цих відношень. Рядок, якому відповідає найменше з відношень, назвемо розв’язувальним. На перетині розв’язувального стовпця та розв’язувального рядка знаходиться розв’язувальний елемент α. Розв’язувальний елемент показує, яку із базисних змінних на наступному кроці буде виключено з базису і переведено в розряд вільних, і навпаки. Тобто розв’язувальний елемент визначає порядок обміну змінних.

5. Після визначення розв’язувального елемента α перейти до заповнення наступної таблиці, тобто до знаходження нового опорного плану, за такими правилами:

а) замість розв’язувального рядка записати елементи розв’язувального рядка, поділені на розв’язувальний елемент α;

б) замість елементів розв’язувального стовпця записуємо нулі, окрім розв’язувального елемента;

в) для розрахунку решти елементів наступної симплекс-таблиці застосувати формулу (1.7) алгоритму кроку перетворень Гаусса-Жордана.

6. Якщо в одержаній таблиці в оцінному рядку знову є додатні, то повернутися до *п*.4. Процедуру повторювати до зникнення в оцінному рядку додатних елементів. Як правило це відбувається за декілька кроків. Після цього записуємо відповідь до задачі.

Отже, перед тим, як переходити до заповнення нової симплексної таблиці, кожного разу треба перевіряти оцінний рядок на наявність додатніх елементів. Тобто ознакою оптимальності опорного плану задачі лінійного програмування є від’ємність усіх оцінок $c_j \left(j = \overline{m+1, n}\right)$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Білоусова С. В., Ковальчук Т. В. Економіко-математичне моделювання: компендіум і практикум: навч. посіб. Київ: Київ. нац. торг.-екон. ун-т, 2018. 524 с.

2. Вища та прикладна математика в економічних прикладах та задачах: практикум (друга частина): навч. посіб. / Щетініна О. К., та ін. Київ: Київ. нац. торг.-екон. ун-т, 2019. 416 с.

3. Федоренко І. К. Дослідження операцій в економіці: підручник. Київ: Знання, 2012. 401 с.

4. Філатова Л.Д. Економіко – математичні методи та моделі: Опорний конспект лекцій для самостійного вивчення дисципліни. Харків: ХННІ ДВНЗ «УБС», 2018. 120 с.