ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ (ЗЛП)

ПЛАН

ВСТУП
1. Особливості задач лінійного програмування
2. Основні поняття та визначення
3. Геометрична інтерпретація та графічний метод розв'язування задач лінійного програмування

ЗАУВАЖЕННЯ.

*Перед тим, як почати опрацювання матеріалу лекції, пропоную спробувати розв'язати таку задачу (**потім порівняєте свою відповідь із правильною):***

Задача. **Підприємство виготовляє продукцію двох гатунків, для чого використовує сировину двох видів. Запаси сировини обмежені і становлять 20 і 40 ум. од. Технологічна матриця має вигляд** $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$**. Прибуток від реалізації одиниці продукції обох гатунків складає 50 і 40 грн. Визначити план випуску продукції, що забезпечить максимальний прибуток підприємству.**

*На перший погляд, задача має дуже просту умову. Але, щоб її розв'язати, треба знати **основи лінійної оптимізації**. Саме для розв'язання задач такого змісту в середині XX сторіччя в результаті поєднання економічних, математичних та кібернетичних знань сформувався і почав інтенсивно розвиватися новий науковий напрямок – економіко-математичне моделювання. З того часу значну кількість економічних задач було розв'язано саме засобами цієї науки. А, як напрям наукового дослідження, економіко-математичне моделювання, останнім часом, вважається частиною самої економіки.*

ВСТУП

Одним із найпотужніших напрямків *економіко-математичного моделювання* є математичне програмування (МП) – це математична наука, що вивчає теорію та методи розв'язування багатовимірних екстремальних задач з обмеженнями, тобто задач на знаходження екстремуму функції багатьох змінних з обмеженнями на область допустимих значень змінних.

У загальному вигляді задача МП формулюється так:

$$F(x_1,...,x_n) \to \max(\min)$$

за умов

$$g_i(x_1,...,x_n) \begin{Bmatrix} = \\ \le \\ \ge \end{Bmatrix} b_i \ \left(i=\overline{1,m}\right).$$

Задачі математичного програмування поділяються на два великі класи: лінійні та нелінійні. Якщо функція і умови – лінійні, то ми одержимо задачу лінійного програмування (ЗЛП), в усіх інших випадках задача буде нелінійною.

Лінійне програмування (ЛП) – це перша і найбільш вивчена частина наукового напряму «Математичне програмування». Що стосується історії математичного програмування, то як самостійна математична наука вона виникла в 30-х роках минулого століття. Вже в 40-х роках методи математичного програмування стають потужним інструментом чисельного розв'язування оптимізаційних задач, здебільшого економічних. Класиками цієї науки вважаються, на той час, радянський вчений Л.В. Канторович та американський вчений Дж.Данціг. В 1975 саме за створення основ лінійної оптимізації Канторович Л.В. став лауреатом Нобелівської премії з економіки «за вклад в теорію оптимального розподілу ресурсів».

На даний момент методи математичного програмування застосовуються в усіх галузях економіки при розв'язуванні прикладних задач. Тому сучасний економіст повинен неодмінно володіти цими методами, щоб стати фахівцем високого рівня.

1. Особливості задач лінійного програмування

Перед тим, як ввести основні поняття та означення, розглянемо дві задачі, що дадуть деяке уявлення про практичний характер і особливості математичних моделей задач лінійного програмування. Під математичною моделлю будемо розуміти формалізований запис економічної умови задачі в математичних символах. Побудова математичної моделі складається з трьох кроків:

1) введення змінних;
2) введення функції, екстремум якої будемо знаходити;
3) введення обмежень.

Задача виробничого планування (задача оптимального використання обмежених ресурсів виробництва). Нехай деякий економічний об'єкт виготовляє продукцію n видів, для чого використовує сировину m видів. Кількість сировини усіх видів обмежена і становить b_1, b_2, … , b_m ум. од. Прибуток від реалізації одиниці кожного виду продукції складає c_1, c_2, …, c_n грн. Відомі також технологічні коефіцієнти a_{ij} – кількість одиниць сировини i-го виду, що необхідна для виробництва одиниці продукції j-го виду $(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n})$. Тобто технологію даного економічного об'єкта можна представити у вигляді технологічної матриці $\boldsymbol{A}$, розмір якої m х n:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Вектор-стовпець цієї матриці $\left(a^j\right)^T=\left(a_{1j}\ a_{2j}\dots a_{ij}\ \dots.a_{mj}\right)$ описує затрати сировини усіх видів на виробництво одиниці продукції j-го виду. Вектор- рядок $a^i=\left(a_{i1}\ a_{i2}\dots a_{ij}\ \dots.a_{in}\right)$ описує затрати сировини i-го виду на виробництво одиниць продукції усіх видів. Скільки одиниць продукції кожного виду треба виготовляти, щоб одержати максимальний прибуток від реалізації цієї продукції?

Математична модель задачі

1. На першому кроці введемо змінні (для цього згадаємо питання, що поставлено в кінці задачі): x_1, x_2, …, x_n – кількість одиниць продукції кожного виду, що планується виготовляти. За економічним змістом задачі на невідомі треба накласти умову невід'ємності, тобто $x_j \ge 0\ \left(j=\overline{1,n}\right)$. Взагалі невідомі зручно представити у вигляді n-вимірного вектора-рядка $X=(x_1\ x_2\dots\ x_j\dots\ x_n)$ з невід'ємними складовими.

2. Другим кроком побудови математичної моделі задачі буде математична формалізація прибутку: $c_1x_1+c_2x_2+\dots+c_jx_j+\dots+c_nx_n=F(x_1,x_2,\dots,x_j,\dots,x_n)$. З економічної точки зору прибуток – це деяка кількість грошових одиниць (справа), з математичної – це функція n змінних (зліва). Прибуток за умовою задачі треба максимізувати, тобто $F(x_1,x_2,\dots,x_j,\dots,x_n)=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j \to \max$.

3. На третьому кроці запишемо обмеження на запаси сировини у вигляді системи нерівностей:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \ldots + a_{1j}x_j \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \ldots + a_{2j}x_j \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \ldots + a_{ij}x_j \ldots + a_{in}x_n \le b_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \ldots + a_{mj}x_j \ldots + a_{mn}x_n \le b_m . \end{cases}$$

Цю систему нерівностей можна записати компактніше: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \left(i = \overline{1,m}\right)$.

Після трьох кроків задача виробничого планування з економічної “перетворилася” в математичну з наступною умовою:

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n\right) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \left(i = \overline{1,m}\right) \\ x_j \ge 0 \left(i = \overline{1,n}\right). \end{cases} \tag{1.1}$$

Отже, потрібно знайти такі невід’ємні значення змінних $x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n$, які б одночасно надавали максимального значення функції $F\left(x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n\right)$ і задовольняли системі обмежень $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \left(i = \overline{1,n}\right)$.

Задача про управління портфелем активів. Інвестор приймає рішення про вклад наявного капіталу. В полі зору знаходяться шість потенційних об’єктів для інвестування. Набір характеристик цих об’єктів відомий і заданий таблицею:

Об’єкт	Прибуток (%)	Термін викупу (рік)	Надійність (бали)
1	5,5	2026	5
2	6,0	2030	4
3	8,0	2035	2
4	7,5	2027	3
5	5,5	2025	5
6	7,0	2028	4

Прийняття рішення про придбання активів супроводжується такими умовами (обмеження на структуру портфеля):

а) сумарний об’єм капіталу складає 100 000 у.о.;

б) частка засобів, які буде вкладено в один об'єкт, не може перевищувати чверті від усього об'єму;

в) більша половина усіх засобів повинна бути вкладена в довгострокові активи (припустимо, що на даний момент такими є активи з терміном погашення після 2029 року);

г) частка активів з надійністю менше чотирьох балів не повинна перевищувати третини від сумарного об'єму.

За таких умов одержати максимальний сумарний прибуток від розміщення активів.

Математична модель задачі

1. Введемо змінні: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 – об'єми засобів, які планується розмістити в активи відповідних фірм. За змістом задачі $x_j \geq 0 \left(j = \overline{1,6} \right)$.

2. Сумарний прибуток:

$$F(x_1,...,x_6) = 0{,}055x_1 + 0{,}060x_2 + 0{,}80x_3 + 0{,}075x_4 + 0{,}55x_5 + 0{,}070x_6 \to \max.$$

3. Обмеження на структуру портфеля запишемо відповідно до умов а)–г):

а) обмеження на сумарний об'єм активів:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = \sum_{i=1}^{6} x_j \leq 100000.$$

б) обмеження на розмір частки кожного активу:

$$x_j \leq 25000 \left(j = \overline{1,6} \right)$$

в) обмеження, яке пов'язане з необхідністю вкладати половину засобів у довгострокові активи:

$$x_2 + x_3 \geq 50000.$$

г) обмеження на частку ненадійних активів:

$$x_3 + x_4 \leq 30000.$$

Математичну модель поведінки інвестора побудовано. В межах цієї моделі ставиться задача пошуку таких невід'ємних значень змінних $x_j \left(j = \overline{1,6} \right)$, за яких функція $F(x_1,...,x_6)$ набуває найбільшого значення і одночасно виконуються обмеження а) – г).

Розглянуті задачі, на перший погляд, не мають нічого спільного. Але якщо проаналізувати математичні моделі обох задач, то не можна не помітити такі загальні риси:

1) невід'ємність змінних;

2) лінійність функції, що досліджується на екстремум;

3) лінійність обмежень, що мають вигляд системи лінійних нерівностей та рівнянь.

Саме такі задачі і є предметом вивчення лінійного програмування, але вони не вичерпують усіх типових задач, що зустрічаються на практиці. В літературі розглянуто і детально проаналізовано ряд задач, що вважаються класичними задачами лінійного програмування. Ми не наводимо їхні умови та математичні моделі, а вкажемо тільки літературні джерела [1–5], в яких можна ознайомитися з цими задачами.

Далі буде показано, що, незважаючи на зовнішню несхожість розглянутих задач, за допомогою деяких прийомів математичні моделі обох задач можна звести до однієї й тієї ж форми, а для розв’язування застосувати спеціально розроблені універсальні методи лінійного програмування.

Але постає питання. Чому до задач такого типу не можна застосувати апарат класичного аналізу? Виявляється, що не можна з двох причин. По-перше, похідні від лінійних функцій за всіма аргументами постійні і ні в яких точках у нуль не перетворюються; по-друге, в задачах лінійного програмування функція набуває екстремального значення тільки в межових точках області визначення. Тому методи пошуку екстремума в лінійному програмуванні можна назвати методами “обстежування” межових точок області визначення задачі і знаходження серед них екстремальних.

2. Основні поняття та визначення

Означення 1.1. *Загальною задачею лінійного програмування називається така задача*:

$$F(x_1, x_2, ..., x_j, ..., x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min) \tag{1.1}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \ \left(i = \overline{1, m}\right) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i \ \left(i = \overline{m_1 + 1, m_2}\right) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ \left(i = \overline{m_2 + 1, m}\right) \\ x_j \ \left(j = \overline{1, n}\right) - \text{довільні.} \end{cases} \tag{1.2}$$

Означення 1.2. *Функція (1.1) називається цільовою функцією, або лінійною формою. Умови (1.2) називаються обмеженнями задачі лінійного програмування.*

Означення 1.3. *Будь-який набір значень змінних* $X=\left(x_1,x_2,...,x_j,...,x_n\right)$, *що задовольняє умовам (1.2), називається допустимим розв'язком або планом задачі лінійного програмування. Множина планів утворює область допустимих планів (ОДП) задачі*.

Означення 1.4. *План* $X_{опт}=\left(x_1^*,x_2^*,...,x_j^*,...,x_n^*\right)$, *що надає цільовій функції (1.1) оптимального значення (max або min) називається оптимальним планом або розв'язком задачі лінійного програмування*.

Загальна ЗЛП не обов'язково має один розв'язок. Може статися, що система обмежень несумісна – тоді розв'язків немає взагалі. В деяких задачах існує нескінченна кількість розв'язків.

Означення 1.5. *Канонічною (або основною) задачею лінійного програмування називається така задача:*

$$F\left(x_1,x_2,...,x_j,...,x_n\right)=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j\rightarrow\min$$

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le b_i\left(i=\overline{1,m}\right)\\ x_j\ge 0\left(j=\overline{1,n}\right).\end{cases}\tag{1.3}$$

Означення 1.6. *Стандартною задачею лінійного програмування називається така задача:*

$$F\left(x_1,x_2,...,x_j,...,x_n\right)=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j\rightarrow\max$$

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le b_i\left(i=\overline{1,m}\right)\\ x_j\ge 0\left(j=\overline{1,n}\right).\end{cases}\tag{1.4}$$

В літературі задача:

$$F\left(x_1,x_2,...,x_j,...,x_n\right)=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j\rightarrow\min$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i \left(i = \overline{1,m}\right) \\ x_j \ge 0 \left(j = \overline{1,n}\right). \end{cases} \tag{1.5}$$

також вважається стандартною ЗЛП, оскільки її дуже легко звести до попередньої задачі. Задачу (1.4) називають першою стандартною формою ЗЛП, а задачу (1.5) – другою стандартною формою ЗЛП.

В економічній практиці задачі (1.4) та (1.5) зустрічаються найчастіше, а переважна більшість універсальних аналітичних методів розв’язування ЗЛП розроблена саме для канонічних задач. Але загальна, стандартна та канонічна постановка – це еквівалентні форми запису задачі лінійного програмування. Будь-яка з них за допомогою нескладних перетворень може бути зведена до іншої, а це означає таке: якщо розв’язана одна із задач, то тим самим знайдено оптимальний план іншої задачі.

Щоб перейти від однієї форми запису до іншої, треба вміти зводити задачу максимізації цільової функції до задачі мінімізації (і навпаки); переходити від обмежень-нерівностей до обмежень-рівнянь (і навпаки); змінювати знак нерівностей; заміняти змінні, що не підкоряються умові невід’ємності, на змінні, що цій умові підкоряються. Покажемо, як це зробити.

Очевидно, що лінійна форма $F(x_1, x_2, ..., x_j, ..., x_n)$ набуває максимального значення, а лінійна форма $-F(x_1, x_2, ..., x_j, ..., x_n)$ набуває мінімального значення на одному й тому ж плані $X_{опт} = (x_1^*, x_2^*, ..., x_j^*, ..., x_n^*)$. Тому максимізація лінійної форми $F(x_1, x_2, ..., x_j, ..., x_n)$ рівносильна мінімізації лінійної форми $-F(x_1, x_2, ..., x_j, ..., x_n)$ і навпаки:

$$F_{\max} = -F_{\min},$$
$$F_{\min} = -F_{\max} \tag{1.6}$$

Обмеження-нерівності виду “≥” зводяться до обмежень-нерівностей виду “≤” шляхом множення нерівностей на –1. А щоб від обмежень-нерівностей перейти до обмежень-рівнянь, треба ввести додаткові невід’ємні змінні (балансові змінні). В нерівностях виду “≤” до лівих частин треба додати додаткові змінні $x_{n+i}\left(i = \overline{1, m_1}\right)$, після чого перший рядок системи обмежень (1.2) загальної задачі лінійного програмування набуде вигляду $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i \left(i = \overline{1, m_1}\right)$. В нерівностях виду “≥” від лівих частин треба відняти додаткові змінні, після чого другий рядок системи обмежень (1.2) набуде вигляду $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_{n+i} = b_i \left(i = m_1 + 1, m_2\right)$. Додаткові змінні в цільову функцію треба ввести з нульовими коефіцієнтами, щоб вигляд цільової функції не змінився.

В цілому ряді випадків не на всі змінні накладено умови невід'ємності (це відображено в умові загальної ЗЛП). Тоді задача, навіть, якщо обмеження представлені у вигляді рівнянь, не буде канонічною. В цьому випадку змінні, на які не накладена умова невід'ємності, замінюють різницею двох невід'ємних змінних: $x_j = x'_j - x''_j$, де $x' \geq 0$ і $x''_j \geq 0$. Цей прийом дуже простий, але приводить до збільшення загальної кількості невідомих, тобто збільшує вимірність задачі.

Як загальну (або стандартну) ЗЛП звести до канонічної форми і навпаки, розглянемо на прикладах.

Задача 1.1. Задано задачу лінійного програмування

$$50x_1 + 20x_2 + 70x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 250 \\ 3x_1 + 5x_2 + 1{,}5x_3 \leq 300 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 \geq 150 \\ x_j \geq 0\left(j = \overline{1{,}3}\right). \end{cases}$$

Записати задачу у канонічній формі.

Розв'язування. Введемо додаткові змінні x_4, x_5, x_6. Змінні x_4 та x_5 додамо до лівих частин перших двох нерівностей, а змінну x_6 віднімемо від лівої частини третьої нерівності. Що стосується цільової функції, то будемо знаходити мінімум функції $F_1(x_1, x_2, x_3) = -50x_1 - 20x_2 - 70x_3$. Отже, вихідну задачу одержали в канонічній формі:

$$-\left(50x_1 + 20x_2 + 70x_3\right) \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 250 \\ 3x_1 + 5x_2 + 1{,}5x_3 + x_5 = 300 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - x_6 = 150 \\ x_j \geq 0\left(j = \overline{1{,}6}\right). \end{cases}$$

Економічний сенс додаткових (балансових) змінних досить прозорий. В кожній конкретній задачі він безпосередньо пов'язаний з економічним змістом самої задачі. Так, наприклад, у задачі виробничого планування балансові змінні – це об'єми невикористаних запасів сировини.

Щоб перейти від канонічної до загальної (стандартної) форми запису ЗЛП, треба спочатку проаналізувати систему обмежень канонічної задачі (1.3). Зробимо це в наступному пункті.

3. Геометрична інтерпретація та графічний метод розв’язування задач лінійного програмування

Розглянемо двовимірну ЗЛП в такому вигляді:

$$F(x_1, x_2) = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0;. \end{cases}$$

Випадок двох змінних взагалі не має особливого прикладного значення, оскільки реальні математичні моделі містять набагато більше змінних. Але для наочного зображення структури та пояснення властивостей ЗЛП він дуже корисний.

Задачі лінійного програмування з двома змінним легко надати геометричну інтерпретацію на площині X_1OX_2. Саме це ми й зробимо. Всі нерівності системи обмежень даної задачі $\boldsymbol{a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i\ \left(i = \overline{1,m}\right)}$ на площині X_1O X_2 визначають напівплощини з межовими прямими $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i\ \left(i = \overline{1,m}\right)$. Якщо система обмежень сумісна, то областю її розв’язків є перетин усіх напівплощин – опукла множина точок на площині X_1OX_2, що є областю допустимих планів задачі, або многокутником розв’язків ЗЛП. Сторони цього многокутника лежать на прямих $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i\ \left(i = \overline{1,m}\right), x_1 = 0$ та $x_2 = 0$.

Поведінку цільової функції в рамках двовимірної моделі можна наглядно охарактеризувати за допомогою ліній рівня та градієнта функції $F(x_1, x_2)$. Нагадаємо, що лінією рівня функції називається множина точок з її області визначення, в яких функція набуває одного й того ж фіксованого значення, тобто $F(x_1, x_2) = const$. Для лінійної функції двох змінних лінії рівня – це сімейство паралельних прямих на площині X_1OX_2. Градієнтом функції називається вектор, що вказує напрямок найшвидшого зростання функції, а значить, орієнтований перпендикулярно до ліній рівня. В двовимірному випадку – це вектор

$$\vec{n} = \nabla F(x_1, x_2) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}; \frac{\partial F}{\partial x_2} \right) = (c_1, c_2).$$

Таким чином, з геометричної точки зору, задачу максимізації зведено до визначення такої точки області допустимих планів, через яку пройде лінія рівня, що відповідає найбільшому з можливих значень функції $F(x_1, x_2)$.

Геометрична інтерпретація дозволяє застосувати графічний метод розв'язування ЗЛП, що складається з таких етапів:

1. Знаходження області допустимих планів, тобто графічне розв'язування системи обмежень.
2. Побудова лінії рівня цільової функції $c_1x_1 + c_2x_2 = const$.
3. Побудова градієнта цільової функції $\vec{n} = (c_1, c_2)$.
4. Паралельне перенесення лінії рівня в напрямку градієнта $\vec{n}$ до знаходження точки максимуму. (Якщо треба знайти мінімум, то лінію рівня треба переносити в напрямку антиградієнта, тобто в напрямку вектора $-\vec{n}$).
5. Обчислення координат точки максимума та знаходження максимального значення цільової функції в цій точці.

Графічний метод розв'язання розглянемо на прикладі задачі, яка була сформульована з самого початку (нагадаємо умову)

Задача. Підприємство виготовляє продукцію двох гатунків, для чого використовує сировину двох видів. Запаси сировини обмежені і становлять 20 і 40 ум. од. Технологічна матриця має вигляд $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$. Прибуток від реалізації одиниці продукції обох гатунків складає 50 і 40 грн. Визначити план випуску продукції, що забезпечить максимальний прибуток підприємству, якщо попит на продукцію першого гатунку ніколи не перевищує попиту на продукцію другого гатунку більше ніж на одиницю.

Розв'язування. Спочатку побудуємо математичну модель задачі. Якщо через x_1 та x_2 позначимо кількість одиниць продукції кожного гатунку, то задача набуде вигляду:

$$F(x_1, x_2) = 50x_1 + 40x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 20 \\ 8x_1 + 5x_2 \le 40 \\ x_1 - x_2 \le 1 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Цю задачу розв'яжемо графічно. Спочатку побудуємо ОДП задачі, тобто розв'яжемо графічно систему обмежень. На площині X_1OX_2 (рис.1.1) нерівності визначають напівплощини з межами

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 20 & (1) & (10;0) & (0;4) \\ 8x_1 + 5x_2 = 40 & (2) & (5;0) & (0;8) \\ x_1 - x_2 = 1 & (3) & (0;\text{-}1) & (1;0). \end{cases}$$

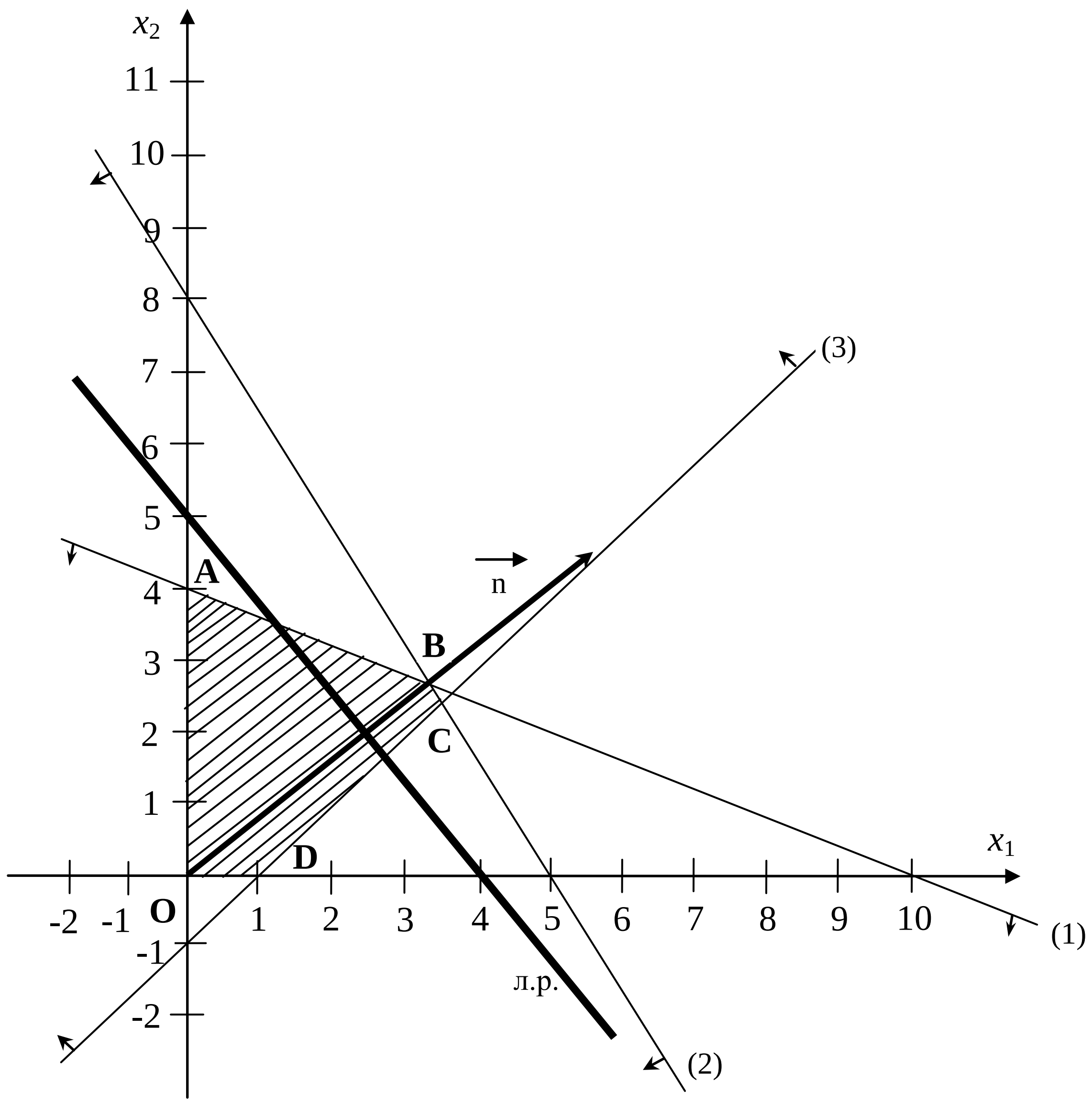

Рис. 1.1

Поряд із кожною прямою вказано номер, яким її позначено на рис. 1.1, та вказано координати, за якими пряму побудовано.

Щоб визначити шукану напівплощину, треба координати довільної точки (точка не повинна належати прямій) підставити в нерівність. Якщо нерівність задовольняється, то шуканою є та напівплощина, якій належить точка. В супротивному випадку – друга напівплощина. Найзручніше обрати координати точки O(0;0). Знайдемо, наприклад, напівплощину, що визначається нерівністю $2x_1 + 5x_2 \leq 20$. Координати точки O(0;0) задовольняють нерівності, значить нерівність визначає напівплощину, якій належить початок координат. На рис.1.1 це показано стрілками. Розмірковуючи так і в наступних двох випадках, одержимо ОДП ЗЛП у вигляді п'ятикутника OABCD. Два обмеження $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ означають, що ОДП даної ЗЛП знаходиться в першій чверті координатної площини X_1OX_2.

Побудуємо лінію рівня. В нашому випадку зручно побудувати пряму $50x_1 + 40x_2 = 200$ за двома точками (0;5) та (4;0). Градієнт матиме вигляд $\vec{n} = (50; 40)$, а оскільки нас цікавить тільки напрямок, то ми можемо замінити його вектором $\vec{n} = (5; 4)$.

Якщо виконати паралельне перенесення лінії рівня в напрямку вектора $\vec{n} = (5; 4)$, то останній раз лінія рівня "доторкнеться" ОДП в точці B. Отже, в точці B цільова функція набуває максимального значення.

Обчислимо координати точки B. Вони задовольняють рівнянням прямих, на перетині яких лежить точка. Тобто, для знаходження координат точки B треба розв'язати систему $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 20 \\ 8x_1 + 5x_2 = 40. \end{cases}$ Значення змінних $x_1 = \frac{10}{3}$ та $x_2 = \frac{8}{3}$ є розв'язком системи і координатами точки B.

Обчислимо максимальне значення функції, що набувається в точці $B\left(\frac{10}{3}; \frac{8}{3}\right)$: $F\max = 50 \cdot \frac{10}{3} + 40 \cdot \frac{8}{3} = \frac{820}{3}$.

***Відповідь до математичної задачі*:** $X_{\text{опт}} = \left(\frac{10}{3}; \frac{8}{3}\right); F\max = \frac{820}{3}$.

***Відповідь до економічної задачі*:** якщо підприємство буде випускати $\frac{10}{3}$ ум.од. продукції першого гатунку та $\frac{8}{3}$ ум.од продукції другого гатунку, то це забезпечить максимальний прибуток $\frac{820}{3}$ грн.

Зауваження: *Графічний метод не має особливого прикладного значення для розв'язання лінійних оптимізаційних задач. Але для пояснення та інтерпретації основного аналітичного методу (симплекс-методу) він є надзвичайно важливим.*

ЛІТЕРАТУРА

1. Білоусова С. В., Ковальчук Т. В. Економіко-математичне моделювання: компендіум і практикум: навч. посіб. Київ: Київ. нац. торг.-екон. ун-т, 2018. 524 с.
2. Вища та прикладна математика в економічних прикладах та задачах: практикум (друга частина): навч. посіб. / Щетініна О. К., та ін. Київ: Київ. нац. торг.-екон. ун-т, 2019. 416 с.
3. Федоренко І. К. Дослідження операцій в економіці: підручник. Київ: Знання, 2012. 401 с.
4. Філатова Л.Д. Економіко – математичні методи та моделі: Опорний конспект лекцій для самостійного вивчення дисципліни. Харків: ХННІ ДВНЗ «УБС», 2018. 120 с.

5. Філатова Л.Д. Оптимізаційні методи та моделі: Збірник навчально-методичних матеріалів для самостійної та індивідуальної роботи студентів. Харків: ХІБС УБС НБУ, 2014. 108 с.