**Тема. Випадкові величини**

Вступ

1. Визначення випадкової величини. Класифікація випадкові величини.

2. Числові характеристики дискретних випадкових величин.

3. Основні закони розподілу дискретних випадкових величин.

4. Функція розподілу неперервної випадкової величини.

5. Щільність розподілу ймовірностей та її властивості.

6. Числові характеристики неперервної випадкової величини.

7. Основні закони розподілу неперервних випадкових величин.

**Вступ**

Поняття «Випадкова величина» - одне з фундаментальних понять теорії ймовірностей. Випадкові величини широко застосовуються в економічних дослідженнях. Без цього поняття не можливо виявити сутність фундаментальних економічних процесів, оскільки більшість із них є випадковими. Поняття «Випадкова величина» є також потужним інструментарієм для прогнозування розвитку соціально-економічних явищ та процесів. В цій лекції ознайомимось поняттям «Випадкова величина» та її основними характеристиками.

**1. Визначення випадкової величини. Класифікація випадкових величин**

***Означення.*** *Випадковою називають величину, яка в результаті випробування може прийняти лише одне числове значення, заздалегідь невідоме і обумовлене випадковими причинами.*

Загальноприйняте позначення випадкових величин : великими літерами X, Y, Z, а їх можливих значень – відповідними малими літерами з індексами. Випадкові величини бувають **дискретними та неперервними**. Дискретні випадкові величини можуть мати тільки скінчену або зчисленну множину значень. Неперервні випадкові величини можуть мати нескінчену множину значень.

***Означення.*** *Законом розподілу випадкової величини називають будь-яке співвідношення, яке встановлює зв’язок між можливими значеннями випадкової величини і ймовірностями, з якими ці значення приймаються*.

Для дискретної випадкової величини закон розподілу зручно задавати у вигляді таблиці, яку називають рядом розподілу:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| ***хі*** | ***x1*** | ***x2*** | ***…*** | ***xn*** |
| ***рі*** | ***р1*** | ***p2*** | ***…*** | ***pn*** |

Для наочності ряд розподілу зображують графічно: по осі абсцис відкладають значення випадкової величини, а по осі ординат – відповідні ймовірності, одержані точки з’єднують відрізками, в результаті одержують многокутник (полігон) розподілу.

Важливо звернути увагу на те, що закон розподілу повністю характеризує випадкову величину.

**2. Числові характеристики дискретних випадкових величин**

Але в багатьох питаннях практики необхідно знати числові характеристики випадкової величини, до яких, у першу чергу, відносяться математичне сподівання, дисперсія та середнє квадратичне відхилення.

Математичне сподівання вказує на центр розподілу випадкової величини, дисперсія і середнє квадратичне відхилення характеризують розсіювання значень випадкової величини відносно її математичного сподівання.

***Означення.*** *Математичним сподіванням дискретної випадкової величини X називають число, яке дорівнює сумі добутків усіх можливих значень X на відповідні їм імовірності:*

*.*

*Якщо випадкова величина приймає нескінчену кількість значень, то*

*,*

*причому, вважається, що ряд, який знаходиться в правій частині рівності, збігається абсолютно та сума всіх ймовірностей дорівнює одиниці.*

*Властивості математичного сподівання*

1. Математичне сподівання від сталої величини С дорівнює самій

сталій: М(С) = С.

2. Математичне сподівання суми випадкових величин дорівнює сумі їх

математичних сподівань: .

3. Математичне сподівання добутку взаємно незалежних випадкових

величин дорівнює добутку математичних сподівань:

.

4. Постійний множник можна виносити за знак математичного

сподівання: *М(С⋅Х)=С⋅М(Х).*

Характеристиками розсіювання можливих значень випадкової величини навколо математичного сподівання є дисперсія та середнє квадратичне відхилення.

*Означення.* *Дисперсією випадкової величини X називається математичне сподівання квадрата відхилення:*

*.*

Для обчислення дисперсії зручно користуватися формулою:

.

*Властивості дисперсії:*

1. Дисперсія сталої величини С дорівнює нулю: М(С) = 0.

2. Дисперсія суми незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій: .

3. Постійний множник можна виносити за знак дисперсії, підносячи його до квадрату: *D(С⋅Х) = C2⋅D(Х).*

*Означення.* *Середнім квадратичним відхиленням випадкової величини називають квадратний корінь із дисперсії:*

*.*

***Приклад.***Закон розподілу дискретної випадкової величини задано:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***xi*** | - 6 | - 4 | 2 | 4 | 6 | 8 |
| ***Рі*** | 0,1 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,1 | 0,2 |

Обчислити *М(Х), D(X), .*

*Розв'язання.* .



.

.

**3. Основні закони розподілу дискретних випадкових величин**

*Закон біноміального розподілу*

Закон розподілу, в якому ймовірність дискретної випадкової величини обчислюється за формулою Бернуллі, називається законом біноміального розподілу:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *xi* | 0 | 1 | 2 | … | n-1 | n |
| *pi* | *qn* |  |  | … |  | *pn* |

*Числові характеристики біноміального закону розподілу:*

*М(х)=np*

*D(x)=npq*

*.*

*Закон розподілу Пуассона*

Закон розподілу Пуассона має вигляд:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *xi* | 0 | 1 | 2 | … | n |
| *pi* |  |  |  |  |  |

де λ=*np*.

Числові характеристики: *М(Х)=nр=*λ; *D(X)= λ.*

**4. Функція розподілу неперервної випадкової величини**

У випадку неперервної випадкової величини для її повної характеристики вводять інтегральну та диференціальну функції розподілу.

***Означення.*** Функцією розподілу F(x) (інтегральною) називають ймовірність того, що випадкова величина X прийме значення менше x:



*Основні властивості інтегральної функції розподілу:*

**1.** ,

2 .

3.  .

**4.**Імовірність того, що НВВ *X* прийме деяке окреме значення дорівнює нулю, тобто  .

**5. Щільність розподілу ймовірностей та її властивості**

***Означення.*** *Диференціальною функцією розподілу або щільністю ймовірностей неперервної випадкової величини називають похідну першого порядку від її інтегральної функції розподілу і позначають :*

**

***Основні властивості функції f(x):***

1. Функція *f(x)*  – невід’ємна

2. Якщо , то 

3. Якщо , то  – умова нормування.

4. Якщо диференціальна функція розподілу *f(x)*  відома), то інтегральну функцію розподілу F(x) можна знайти за формулою:

.

**6. Числові характеристики неперервної випадкової величини**

***Означення.*** *Якщо неперервна випадкова величина приймає значення на відрізку [a,b] та має щільністьрозподілу ймовірностей f(x), то її математичне сподівання знаходиться за формулою:*

*.*

*Дисперсію обчислюють за формулою:*

**

*Моменти випадкової величини (узагальнені числові характеристики):*

а) початковий момент k-го порядку:

;

б) центральний момент k-го порядку:

.

*Приклад.* Знайти числові характеристики випадкової величини X, яка задана функцією розподілу:

 

*Розв'язання.* Спочатку знайдемо диференціальну функцію розподілу, тобто щільність ймовірності **:**

** **

Тепер знаходимо математичне сподівання:

****

Далі знаходимо дисперсію:

****

Середнє квадратичне відхилення:

****

**7. Основні закони розподілу неперервних випадкових величин**

***Означення.*** *Рівномірним законом розподілом неперервної випадкової величини називають такий розподіл, при якому диференціальна функція розподілу є сталою величиною на відрізку [a,b], а зовні цього відрізка – дорівнює нулю:*

**

Функція розподілу для рівномірного закону має вигляд:



Числові характеристики випадкової величини, яка розподілена за рівномірним законом:







***Означення***. *Неперервна випадкова величина Х, яка приймає тільки невід’ємні значення з щільністю імовірностей:*

**

*вважається розподіленою за показниковим законом з параметром λ>0.*

Функція розподілу для показникового закону має вигляд:



Числові характеристики випадкової величини, яка розподілена за показниковимим законом:







***Означення.*** *Випадкова величина Х розподілена за нормальним законом, якщо її щільність розподілу визначається формулою:*

**

Графік функції розподілу називається *нормальною кривою*.

Відзначимо, наступне:

1) функція визначена при будь-якому значенні змінної *x*;

2) при будь-якому значенні змінної *x* значення функції додатне;

3) вісь *Ox* є горизонтальною асимптотою графіка функції;

4) точка *x = mx*  є точкою максимума функції, значення функції в ній дорівнює .

5) графік функції симетричний відносно прямої *x = mx* .



При однаковому значенні середньо квадратичного відхилення математичне сподівання визначає положення нормальної кривої на числовій осі. На рисунку показані дві нормальні криві, для яких 1  1 і *mx*  =2, *mx*  3.

При однаковому значенні *mx* величина середньо квадратичного відхилення  визначає форму нормальної кривої:



Якщо математичне сподівання та середньо квадратичне відхилення мають довільні значення, то нормальний розподіл називається загальним.

Нормальний розподіл з *mx*  = 0 і  1 називається нормованим*.* Крива нормованого розподілу симетрична щодо осі *Oy* .

Функція розподілу має вигляд:



Ймовірність попаданняння випадкової величини Х в проміжок (α, β) обчислюється за формулою:



**Список рекомендованої літератури**

Гладунський В.Н. Математика для економістів: означення, формули, приклади. Навч. посібник. - Львів, 2013, 632 с.

Лозовий Б.Н., Пушак Я.С. Теорія ймовірностей і елементи математичної статистики. Навч. посібник. – К.: Ліра-К, 2018. – 276с.

Копич І.М., Сороківський В.М., Теорія ймовірностей та математична статистика. Навч. посібник. – К.: Ліра-К, 2018 – 382с.